

FERRORRESONANCIA SERIE EN TRANSFORMADORES DE TENSIÓN



CUADERNOS DE FORMACIÓN: 6

Este documento está sometido a posibles cambios.
Póngase en contacto con ARTECHE para la
confirmación de las características y disponibilidades
aquí descritas.

Adolfo Ibero
© ARTECHE



Moving together

ÍNDICE

1. Descripción del Fenómeno de la Ferrorresonancia Serie | 4
2. Ferrorresonancia Fundamental y Subarmónica | 6
 - 2.1. Fundamental | 6
 - 2.2. Subarmónica | 6
3. Cálculos y Ecuaciones | 8
4. Resultados experimentales obtenidos con ensayos sobre Circuitos en Ferrorresonancia Fundamental | 11
5. Referencias | 11

RESUMEN

Se describe en este artículo el fenómeno de la ferorrresonancia serie en los casos de ferorrresonancia fundamental y subarmónica. Partiendo del circuito completo R-L-C en ferorrresonancia se determina el valor mínimo de tensión de red que sostiene el fenómeno.

Se compara, para el caso de ferorrresonancia fundamental, el resultado de diversas experiencias de laboratorio con los cálculos efectuados. La aplicación de lo aquí desarrollado es inmediata al caso de los transformadores de tensión inductivos y capacitivos.

1. DESCRIPCIÓN DEL FENÓMENO DE LA FERRORRESONANCIA SERIE

En un circuito serie R-L-C, para una tensión aplicada, siempre circula la misma corriente, puesto que sus componentes están caracterizados por ser constantes y por tanto invariables con la corriente, la tensión o el tiempo.

Sin embargo, si en el mismo circuito introducimos como parámetro del circuito una autoinducción (L) variable con la corriente o la tensión en sus bornes, nos encontramos con la posibilidad de que se produzca un régimen sostenido de corrientes y tensiones dentro del circuito totalmente distinto al esperado para una determinada tensión de alimentación.

La forma clásica de explicar el fenómeno [1], aunque da una primera aproximación suficiente, sin embargo no conduce a la

comprensión real del fenómeno y a su cuantificación matemática al no tener en cuenta que la autoinducción es una curva de transferencia compleja y no el cociente directo entre valores de tensión e intensidad en régimen permanente.

En la fig. 1 tenemos el circuito serie R-L-C y la característica magnética de autoinducción.

La aparición del régimen de ferorrresonancia en el circuito, partiendo de un régimen senoidal en permanencia, se produce siempre por una variación en la tensión de alimentación del circuito, la cual puede volver de nuevo a las condiciones originales pero manteniendo la ferorrresonancia.

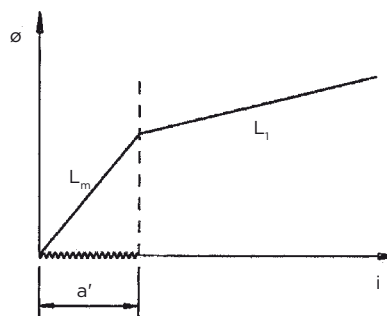
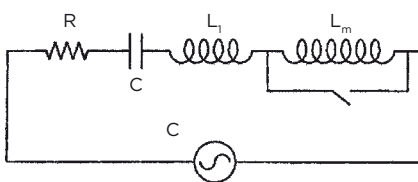


Fig. 1



1. DESCRIPCIÓN DEL FENÓMENO DE LA FERRORRESONANCIA SERIE

En la fig. 2 aparecen las formas de onda de tensión y corriente en los distintos elementos de un circuito serie R-L-C. De esta figura podemos deducir lo siguiente: en el circuito en ferorrresonancia sostenida se producen 2 regímenes transitorios cada medio ciclo de red y que son sincronizados por la corriente senoidal que circula por el circuito.

La inducción pasa bruscamente del valor L_1 a L_m y viceversa con dos regímenes de carga y descarga en sentido contrario de C a través suyo.

Cuando la corriente de descarga y carga en sentido contrario de C a través de L_m llega a valer a' se tiene que $L = L_m$ pasa a ser $L = L_1$. En este momento, el condensador C se descarga a través de L_1 con una corriente transitoria en forma de semisinusoide y frecuencia:

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C}}$$

Cuando la intensidad transitoria de esta descarga se va acercando hacia cero ($t = \pi/\omega_o$) entonces para valores de corriente menores que a' , la autoinducción pasa a valer $L = L_m$. El condensador C cargado en sentido opuesto se encuentra con una L_m muy grande y se producirá una oscilación de frecuencia:

$$f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_m C}}$$

mucho más baja que la anterior.

La corriente de este transitorio crece muy lentamente y apenas se aprecia variación de tensión en el condensador.

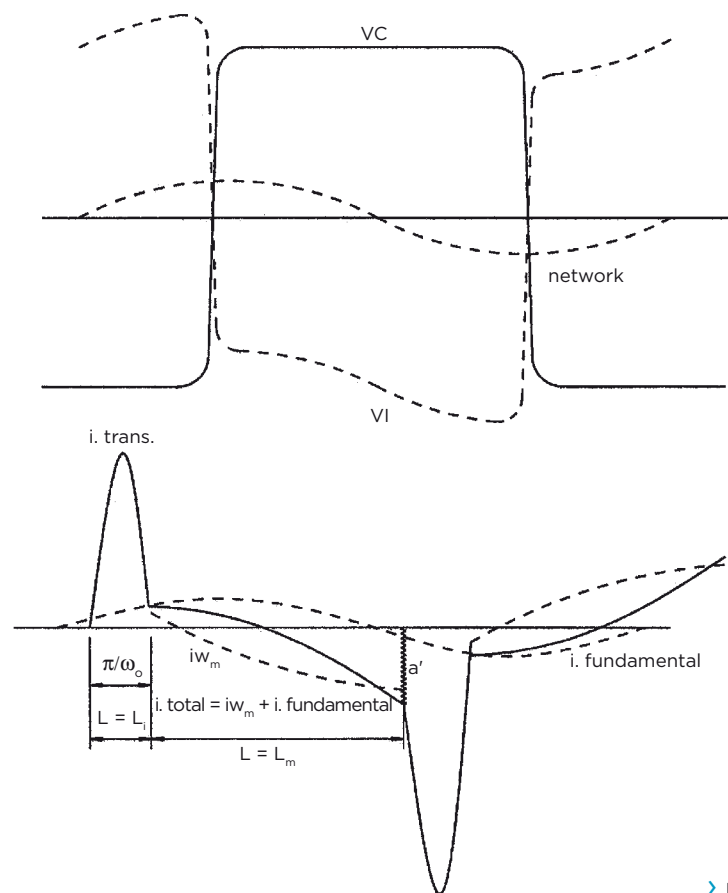
Cuando la corriente de este lento transitorio sumada con la senoidal de la red llega a valor a' entonces $L = L_1$ y se repite el fenómeno indefinidamente.

Se debe tener en cuenta lo siguiente:

Cuando $L = L_m$ a la frecuencia de red se tiene

$$L_m \omega \gg \frac{1}{C \omega}$$

y, por tanto, el circuito es fuertemente inductivo. Esto implica que por el circuito circulará una débil corriente senoidal de carácter inductivo en los intervalos en que la autoinducción no esté saturada y hará que casi toda la tensión de red aparezca como rizado sobre la tensión de la autoinducción.



> Fig. 2

2. FERRORRESONANCIA FUNDAMENTAL Y SUBARMÓNICA

2.1. FUNDAMENTAL 2.2. SUBARMÓNICA

De lo descrito en el apartado anterior se deducen las condiciones que un circuito R-C-L debe cumplir para que se mantenga en ferorrresonancia fundamental:

- a. La frecuencia de oscilación propia del circuito L_1 -C debe ser mayor que la de la red (generalmente mucho mayor), es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot C}} \equiv \omega_0 > \omega$$

Esto equivale a decir que a la frecuencia de red el circuito L_1 -C sea capacitivo, es decir:

$$\frac{1}{\omega \cdot C} > L_1 \omega$$

- b. La frecuencia de oscilación propia del circuito L_m -C debe ser menor que la de la red, ya que de esta forma se sincroniza el fenómeno cada medio ciclo. Si $\omega_m > \omega$ entonces es imposible sincronizarlo, es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{L_m C}} = \omega_m < \omega$$

Esto equivale a decir que a la frecuencia de la red el circuito L_m -C debe ser inductivo y por tanto:

$$\frac{1}{C \omega} < L_m \omega$$

- c. La descarga de C a través de L_1 debe ser oscilante, para lo cual el circuito debe ser subamortiguado, es decir:

$$R < R_c = 2 \sqrt{\frac{L_1}{C}}$$

De esta forma garantizamos que la corriente pasa por cero, con una $\omega_0 > \omega$, y se conmuta L_1 pasando a valer L_m y viceversa.

- d. La tensión de red debe ser suficiente para aportar la energía perdida en la resistencia R en los momentos de conmutación. Además suponemos que las pérdidas en R por la corriente senoidal de la red o la corriente de pulsación ω_m son despreciables debido a sus bajos valores.

En la fig. 3 se observan las formas de onda de tensiones y corrientes en el circuito en el caso de ferorrresonancia subarmónica.

La ferorrresonancia subarmónica se produce cuando la autoinducción L_m no saturada junto con la capacidad C del circuito tienen una frecuencia propia de oscilación f_m menor que la del subarmónico que se pueda producir.

De esta forma, sumadas la corriente oscilatoria de frecuencia f_m y la componente fundamental, pueden ser capaces de saturar la autoinducción de forma síncrona cada 1'5 ciclos de red, 2'5 ciclos, 3'5 ciclos, etc, es decir con un período de oscilación de 3 ciclos, 5 ciclos, 7 ciclos, etc, (3^{er} subarmónico, 5^º subarmónico, 7^º subarmónico, etc).

El caso anterior de la ferorrresonancia fundamental es, en realidad, este mismo pero sincronizado cada 1/2 ciclo.

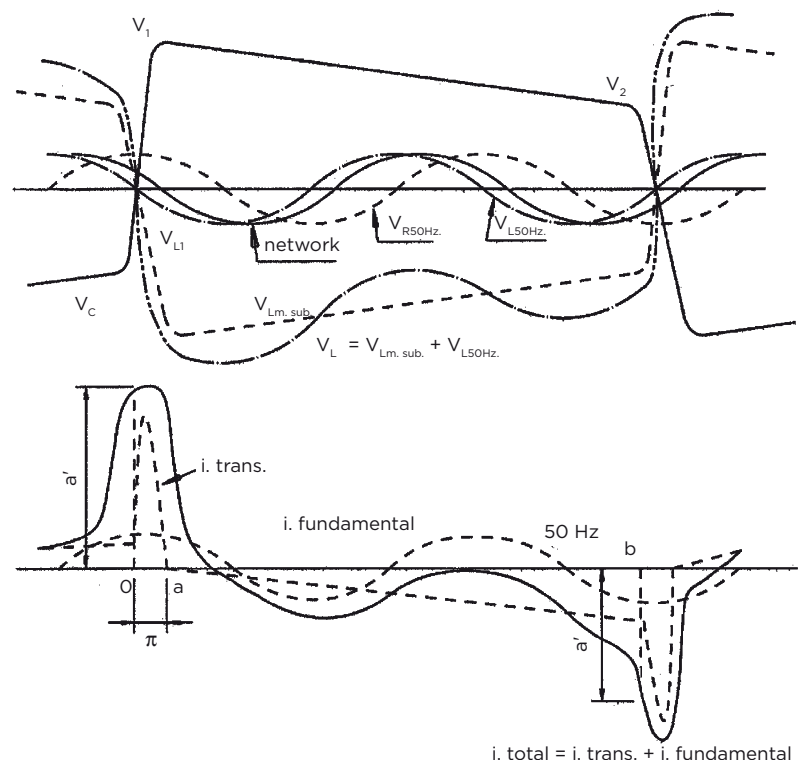


Fig. 3

2. FERRORRESONANCIA FUNDAMENTAL Y SUBARMÓNICA

En la figura 3 se observa que si la frecuencia de oscilación libre

$$\frac{1}{\sqrt{L_m C}}$$

es p. ej. menor que el noveno subarmónico, podrían aparecer ferorresonancias de 1^{er} subarmónico (fundamental), después del 3^{er} subarmónico, después del 5^o subarmónico, después del 7^o e incluso del 9^o, pero nunca del 11^o, es decir, de una frecuencia inferior a la de oscilación libre:

$$\frac{1}{\sqrt{L_m C}}$$

Los subarmónicos van aumentando su período (rango) a medida que la tensión de red va decreciendo.

De la figura 3 podemos deducir las condiciones del circuito para que exista la ferorresonancia subarmónica:

- a. La frecuencia de oscilación propia del circuito L_1 -C debe ser mayor que la del subarmónico considerado, es decir:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}} > \omega_{\text{subarmónico}}$$

o bien a la frecuencia del subarmónico considerando el circuito L_1 -C debe ser capacitivo:

$$\frac{1}{C \frac{\omega}{n}} > L_1 \frac{\omega}{n}$$

siendo n = rango del subarmónico considerado.

- b. La frecuencia de oscilación propia del circuito L_m -C debe ser menor que la del subarmónico considerado de forma que el fenómeno pueda sincronizarse, es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{L_m C}} < \omega_{\text{subarmónico considerado}}$$

esto equivale a decir que a la frecuencia del subarmónico considerado el circuito L_m -C debe ser inductivo:

$$\frac{1}{C \frac{\omega}{n}} > L_m \frac{\omega}{n}$$

siendo n = rango del subarmónico considerado.

- c. La descarga de C a través de L_1 debe ser oscilante, para lo cual el circuito debe ser subamortiguado, es decir:

$$R < R_c = 2 \sqrt{\frac{L_1}{C}}$$

De esta forma garantizamos que la corriente pasa por cero, con una $\omega_0 > \omega_{\text{subarmónico}}$, y se conmuta L_1 pasando a valor L_m y viceversa.

- d. La tensión de red debe ser suficiente para aportar la energía pedida en la resistencia R en los momentos de conmutación. Además suponemos que las pérdidas en R por la corriente senoidal de la red o la corriente de pulsación $\frac{\omega}{n}$ son despreciables debido a sus bajos valores.



3. CÁLCULOS Y ECUACIONES

Se exponen a continuación las ecuaciones de equilibrio para el mantenimiento de la ferorresonancia fundamental y de la subarmónica.

Primeramente suponemos que el núcleo no tiene pérdidas y comprobamos la influencia de la resistencia serie r_1 , (Fig. 4).

Las hipótesis de partida son las siguientes:

- La corriente de excitación senoidal es despreciable frente a los impulsos en los transitorios.
- La autoinducción tiene 2 valores: L_m cuando está sin saturar y L_1 cuando está saturada. Además, cuando la autoinducción vale L_m , ésta es tan grande que impide que se descargue el condensador.

Las ecuaciones a aplicar son:

$$U_{\text{alimentación}} = V_L + V_C$$

Ec. (1)

Energía aportada por la red = Energía consumida en el circuito

Ec. (2)

Desarrollando ambas para el caso de la ferorresonancia fundamental e integrando la ecuación (1) entre a y b se tiene:

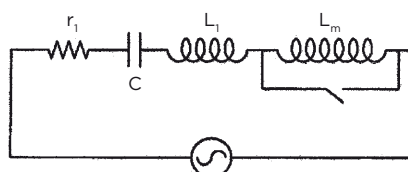
$$\int_a^b U_{\text{alim}} \cdot d(\omega \cdot t) = \int_a^b V_L \cdot d(\omega \cdot t) + \int_a^b V_C \cdot d(\omega \cdot t)$$

y donde

$$\int_a^b V_L \cdot d(\omega \cdot t) = \frac{E_{\text{sat}} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{\omega}$$

$$\int_a^b V_C \cdot d(\omega \cdot t) = V_0 (b - a)$$

$$b - a = \frac{\pi}{\omega} - \frac{\pi}{\omega_0}$$



$$\text{llamando } m = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ y } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L_1 C} - \frac{r_1^2}{4L_1^2}}$$

se tiene

$$E_{\text{sat}} \cdot 2\sqrt{2} = \omega \cdot V_0 (b - a)$$

$$E_{\text{sat}} \cdot 2\sqrt{2} = \omega \cdot V_0 \left(\frac{\pi}{\omega} - \frac{\pi}{\omega_0} \right)$$

$$E_{\text{sat}} \cdot 2\sqrt{2} = V_0 \pi \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$$E_{\text{sat}} \cdot 2\sqrt{2} = V_0 \pi (1 - m)$$

Ec. (3)

De la ecuación (2) se deduce:

Energía aportada por la red:

$$\int_{b'}^a u_{\text{alim}} \cdot i \cdot dt$$

Ec. (4)

Energía perdida en la conmutación:

$$\int_{b'}^a r_1 \cdot i^2 \cdot dt$$

Ec. (5)

Durante la conmutación podemos suponer:

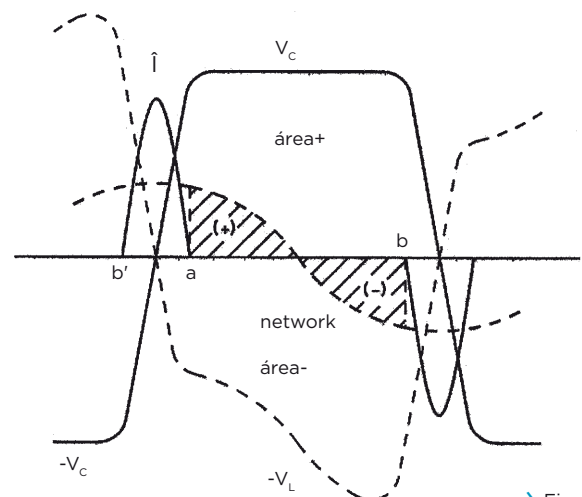
$$u_{\text{alim}} = \hat{V} = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}}$$

ya que $\omega_0 \gg \omega$

Asimismo,

$$i = \hat{I} \cdot \sin \omega_0 t$$

con $b' = 0$ y $a = \pi$



> Fig. 4

3. CÁLCULOS Y ECUACIONES

La corriente de carga y descarga de C pone en juego una carga que vale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} i dt = 2 \cdot C \cdot V_0$$

Supuesto que $i = \hat{i} \cdot \sin \omega_0 t$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} \hat{i} \cdot \sin \omega_0 t dt = \hat{i} \cdot \frac{2}{\omega_0}$$

Es decir: $\hat{i} \cdot \frac{2}{\omega_0} = 2 \cdot C \cdot V_0$

Como: $\omega = m \cdot \omega_0$

$$\Rightarrow \hat{i} = \frac{\omega}{m} \cdot C \cdot V_0$$

Luego:

$$\hat{i} = \frac{V_0}{m \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} = \frac{V_0}{m \cdot X_c}$$

La relación entre la tensión mínima que mantiene el fenómeno ($\hat{V}$), la tensión en el condensador (V_0) y la corriente en los períodos de conmutación ($\hat{i}$) se obtiene:

$$\hat{V} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} i dt = r_1 \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} i^2 dt$$

como $i = \hat{i} \cdot \sin \omega_0 t$, se tiene

$$r_1 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} \hat{i}^2 \sin^2 \omega_0 t dt = r_1 \hat{i}^2 \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} \left(\frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2} \right) dt$$

$$= r_1 \hat{i}^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right]_0^{\frac{\pi}{\omega_0}}$$

$$r_1 \hat{i}^2 \left[\frac{\pi}{2\omega_0} - 0 \right] = \frac{r_1 \hat{i}^2 \pi}{2\omega_0}$$

Por otra parte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} i \cdot dt = Q = 2 \cdot C \cdot V_0$$

Suponiendo que $\hat{V}$ permanece constante durante ese semiperíodo se tiene:

$$\hat{V} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} i \cdot dt = \hat{V} \cdot Q = \hat{V} \cdot 2 \cdot C \cdot V_0$$

Igualando ambos términos:

$$\hat{V} \cdot 2 \cdot C \cdot V_0 = \frac{r_1 \hat{i}^2 \pi}{2 \omega_0}$$

Como

$$2 \cdot C \cdot V_0 = \frac{\hat{i} \cdot 2}{\omega_0}$$

se tiene

$$\hat{V} \cdot \frac{\hat{i} \cdot 2}{\omega_0} = \frac{r_1 \cdot \hat{i}^2 \cdot \pi}{2 \cdot \omega_0}$$

es decir:

$$\hat{V} = \frac{r_1 \cdot \hat{i} \cdot \pi}{4}$$

Como $\hat{i} = \frac{\omega}{m} \cdot C \cdot V_0$ y $V_0 = \frac{E_{sat} \cdot 2\sqrt{2}}{\pi \cdot (1-m)}$

se tiene:

$$\hat{V} = \frac{r_1 \cdot \omega \cdot C \cdot E_{sat} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \pi}{m \cdot 4 \cdot \pi \cdot (1-m)}$$

es decir:

$$\hat{V} = \frac{r_1 \cdot \omega \cdot C \cdot E_{sat} \cdot \sqrt{2}}{2m \cdot (1-m)} = \frac{r_1 \cdot E_{sat} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot X_c \cdot m \cdot (1-m)}$$

Como $\hat{V} = U_{eff} \cdot \sqrt{2}$, entonces:

$$\frac{U_{eff}}{E_{sat}} = \frac{r_1}{2 \cdot X_c \cdot m \cdot (1-m)}$$

Ec. (7)

donde $m = \frac{\omega}{\omega_0}$, $X_c = \frac{1}{\omega \cdot C}$

E_{sat} = tensión de saturación de la autoinducción a 50 Hz.

3. CÁLCULOS Y ECUACIONES

La influencia de las pérdidas en el núcleo de la autoinducción se puede representar por medio de una resistencia R en paralelo con la autoinducción no saturada L_m (fig. 5).

La ecuación que debe cumplirse en cualquier régimen de ferorresonancia es la siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Energía aportada por la red} = \\ &\text{Energía perdida en } r_1 + \text{Energía perdida en } R \\ &\text{Ec.(8)} \end{aligned}$$

La ecuación 8 se desarrolla igual que los casos anteriores, con la diferencia de que el término "Energía perdida en R " se obtiene como la descarga de C a través de R cuando la autoinducción vale $L = L_m$.

Como ahora la tensión en el condensador cae de V_1 hasta V_2 se tiene una energía perdida de valor:

$$\frac{1}{2} \cdot C \cdot (V_1^2 - V_2^2)$$

Además en el proceso de carga-descarga de C desde V_2 a V_1 se tiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} i \cdot dt = Q = (V_1 + V_2) \cdot C$$

y esto vale:

$$\frac{\hat{I} \cdot 2}{\omega_0} = C \cdot (V_1 + V_2)$$

Por tanto, el incremento de tensión de alimentación $\Delta \hat{U}$ necesaria para mantener la ferorresonancia será:

$$\Delta \hat{U} \cdot \frac{\hat{I} \cdot 2}{\omega_0} = \Delta \hat{U} \cdot C \cdot (V_1 + V_2) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (V_1^2 - V_2^2)$$

Es decir:

$$\Delta \hat{U} = \frac{1}{2} \cdot (V_1 - V_2)$$

O bien

$$\Delta \hat{U}_{\text{eff}} = \frac{V_1 - V_2}{2 \sqrt{2}}$$

siendo

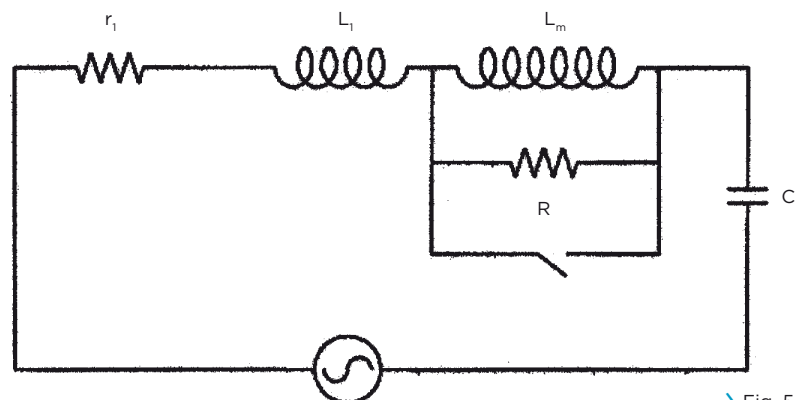
$$V_1 - V_2 = \frac{2 \sqrt{2} \cdot E_{\text{sat}}}{\omega \cdot C \cdot R}$$

por lo cual

$$\frac{\Delta \hat{U}_{\text{eff}}}{E_{\text{sat}}} = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R} = \frac{X_c}{R}$$

Ec. (9)

Por lo tanto, si se desean tener en cuenta las pérdidas en la autoinducción, es preciso añadir al segundo término de la ecuación (7) el segundo término de la ecuación (9).



> Fig. 5

4. RESULTADOS EXPERIMENTALES OBTENIDOS CON ENSAYOS SOBRE CIRCUITOS EN FERRORRESONANCIA FUNDAMENTAL

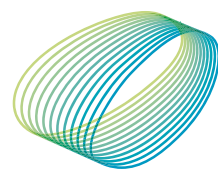
Se han realizado los siguientes experimentos sobre el circuito de la figura haciéndolo entrar en ferorresonancia subiendo la tensión de alimentación. Después se disminuye lentamente la tensión de alimentación y se mide a qué tensión eficaz desaparece el fenómeno. Los resultados obtenidos aparecen en la Tabla 1.

Tabla 1

Parámetros de Circuito				V. Alimentación	
r_1 Ohm	$L_x \times 10^{-3} H$	R Ohm	$C \times 10^{-6} F$	CALCULADO	MEDIDA
2,85	6,54	230	80	12,68	10,6
2,85	6,54	230	180	14,56	14,05
2,85	6,54	230	240	19,96	16,5
2,85	6,54	230	300	19,81	19,8
2,85	6,54	230	360	23,08	23,7
2,85	6,54	66	80	33,06	32
2,85	6,54	66	180	23,62	24,2
2,85	6,54	66	240	23,75	24,5
2,85	6,54	66	300	25,24	25,6
2,85	6,54	66	360	27,6	27,4

5. REFERENCIAS

- [1] Cahen, F.: Electrotechnique, Gauthier-Villars, 1963.
- [2] Mahy, P.: Contribution theorique et experimentale à l'etude des phénomènes de ferorresonance monophasée, SRBE, 1972.



arteche
Moving together